第四章 有限差分方法

§4.1 引言

一阶微分的中心差商：

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}. \qquad (4.1.3)$$

一阶微分的向前，向后一阶差商：

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}, \qquad (4.1.4)$$

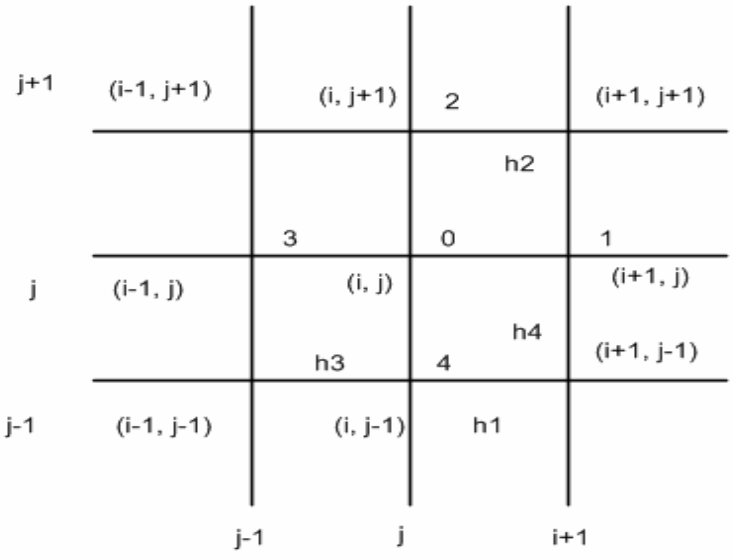
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h}. \qquad (4.1.5)$$

二阶微分的中心差商：

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}. \qquad (4.1.6)$$

拉普拉斯算符在 0 点作用在此函数上的值，也可以用临近的点上的函数值来表示出来。（$h_1=h_2=h_3=h_4=h$ 时）

$$\nabla^2 f \approx \frac{f_1+f_2+f_3+f_4-4f_0}{h^2}. \qquad (4.1.7)$$



节点 0 及邻近节点。

§4.1 有限差分法和偏微分方程

在边界值问题中，边界上的信息是给定的。

假定某方程形式上可以写为：

$$L\phi = q. \qquad (4.2.1)$$

其中 L 为含偏微商的算符．它的边界条件一般可写为：

$$\phi|_G + g_1(s)\frac{\partial\phi}{\partial n}|_G = g_2(s). \qquad (4.2.2)$$

这里 G 表示场域 D 的边界，$g_1(s), g_2(s)$ 为边界上 s 点的逐点函数。

（1）第一类边界条件，（Dirichle）问题（$g_1 = 0, g_2 \neq 0$）。

$$\phi|_G = g(s). \qquad (4.2.3)$$

（2）第二类边界条件，（Neumann）问题（$g_1 \neq 0, g_2 = 0$）。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}|_G = g(s). \qquad (4.2.4)$$

（3）第三类边界条件，或称混合问题（$g_1 \neq 0, g_2 \neq 0$）。

对于算符 L 为斯杜-刘维尔（Sturm-Liouville）算符的特定情况，即

$$L \equiv -\nabla(p\nabla) + f \ . \qquad (4.2.5)$$

势函数起关键作用的许多问题当中的基本方程。当 p=1，f=0 时，我们得到泊松（Poisson）方程。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + f(x,y)\phi = q(x,y). \qquad 4.2.6)$$

该方程的差分表达式为

$$(\nabla^2\phi)_0 = 2\left[\frac{h_3(\phi_1-\phi_0)+h_1(\phi_3-\phi_0)}{h_1h_3(h_1+h_3)}+\frac{h_4(\phi_2-\phi_0)+h_2(\phi_4-\phi_0)}{h_2h_4(h_2+h_4)}\right]+f_0\phi_0 = q_0$$

如果在 x 和 y 方向的步长分别相等，即 $h_1 = h_3 = h_x$ 和 $h_2 = h_4 = h_y$ 时，则上式化为

$$\frac{\phi_1-2\phi_0+\phi_3}{h_x^{\,2}}+\frac{\phi_2-2\phi_0+\phi_4}{h_y^{\,2}}+f_0\phi_0 = q_0 \quad , \qquad (4.2.19)$$

一般可以用角标来表示节点的标记，将上式写为

$$\frac{1}{h_x^{\,2}}(\phi_{i+1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i-1,j})+\frac{1}{h_y^{\,2}}(\phi_{i,j+1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1})+f_{i,j}\phi_{i,j} = q_{i,j} \quad , \qquad (4.2.20)$$

这就是 $\phi_{i,j}$ 所满足的差分方程。通常称为“五点格式”或“菱形格式”，特别是当 $h_x = h_y = h$ 时，我们得到：

$$\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}+(h^2 f_{i,j}-4)\phi_{i,j} = h^2 q_{i,j} \quad , \qquad (4.2.21)$$

对于 $f = 0$，泊松方程为：$\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}-4\phi_{i,j} = h^2 q_{i,j}$。

对于 $f=q=0$ 的拉普拉斯方程，

$$\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}-4\phi_{i,j}=0, \qquad (4.2.23)$$

二维情况边界条件的离散化的处理：

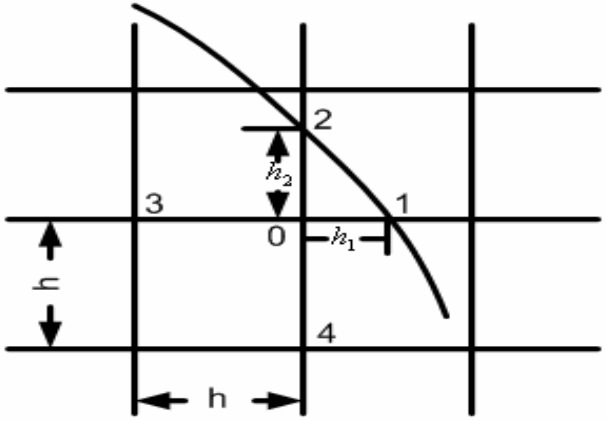
（1） 第一类边界条件

在二维情况下，如果网格的边界节点恰好落在边界 G 上，则显然无需再做近似处理，边界节点的函数值就等于边界条件给出的函数值。

网格边界节点不在边界上，我们通常用以下三种方法处理。

（a） 直接转移法

我们取最靠近 0 点的边界节点上的函数值作为 0 点的函数值。又称为**零次插值法**。



场域的第一类边界条件

(a) 线性插值法

- 先判断 x 方向的边界节点 1 和 y 方向的边界节点 2 哪一个更靠近 0 点。
- 如果 1 更靠近 0 点，则可以用 x 方向的线性插值给出 0 点的函数值：

$$\phi_0 = \frac{h\phi_1 + h_1\phi_3}{h + h_1} \qquad (4.2.24)$$

,

2. 计算格式的建立

$\varphi_l^{(e)} \equiv \varphi^{(e)}(x_l, y_l)\ (l = i, j, m)$标记三角形元素（e）三个顶点上的函数值

函数$\varphi(x, y)$在（e）内近似认为是随x, y线性变化的。这相当于在这个局域范围内，场可以看成是近似均匀的。这样我们可以用线性插值法来构造在元素（e）内部任一点上的势函数值$\varphi(x, y)$，即

$$\varphi = \varphi(x, y) = g_1 + g_2 x + g_3 y . \qquad (5.2.2)$$

其中g_1, g_2和g_3由元素（e）上的三个节点的函数值来决定。

$$\left.\begin{aligned} g_1 + g_2 x_i + g_3 y_i &= \varphi(x_i, y_i) = \varphi_i \\ g_1 + g_2 x_j + g_3 y_j &= \varphi(x_j, y_j) = \varphi_j \\ g_1 + g_2 x_m + g_3 y_m &= \varphi(x_m, y_m) = \varphi_m \end{aligned}\right\} .$$

由此很容易解出：

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= (a_i\varphi_i + a_j\varphi_j + a_m\varphi_m)/2\Delta \\ g_2 &= (b_i\varphi_i + b_j\varphi_j + b_m\varphi_m)/2\Delta \\ g_3 &= (c_i\varphi_i + c_j\varphi_j + c_m\varphi_m)/2\Delta \end{aligned}\right\} . \qquad (5.2.3)$$

如果边界节点 2 更靠近 0 点，则可以类似地用 y 方向 2，4 边界节点的函数值线性插值求出 0 点函数值 ϕ_0。

$$\phi_0 = \frac{h\phi_2 + h_2\phi_4}{h + h_2}, \qquad (4.2.25)$$

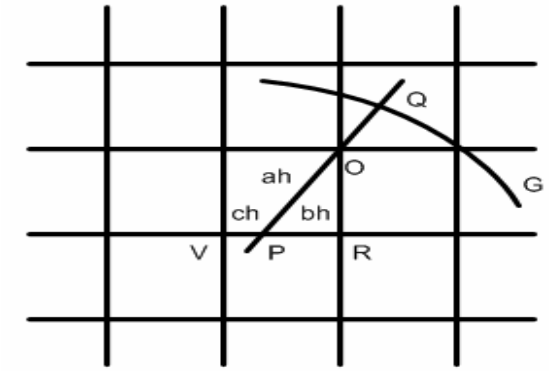
更为精确的方法是采用双向插值。如果 $h_1 = \alpha h$，$h_2 = \beta h$，

$$\frac{1}{\alpha(1+\alpha)}\phi_1 + \frac{1}{\beta(1+\beta)}\phi_2 + \frac{1}{1+\alpha}\phi_3 + \frac{1}{1+\beta}\phi_4 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\phi_0 + \frac{h^2}{2} f_0\phi_0 = \frac{h^2}{2} q_0$$

（1） 第二类和第三类边界条件

第二类和第三类边界条件可以统一写为

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n} + \alpha\phi\right)|_G = g. \qquad (4.2.27)$$



场域的混合边界条件

对O点有

$$\frac{\phi_0-\phi_P}{ah}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_O+O(h). \qquad (4.2.28)$$

因为P点一般不是节点，其值应当以V点和R点的插值给出。

$$\phi_P=b\phi_V+c\phi_R+O(h^2). \qquad (4.2.29)$$

将其代入公式(4.2.27)，并由于$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_O=\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_Q+O(h)$，则得到

$$\frac{1}{ah}(\phi_0-b\phi_V-c\phi_R)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_Q+O(h). \qquad (4.2.30)$$

从边界条件，有关系式

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_Q=-\alpha(Q)\phi_Q+g(Q). \qquad (4.2.31)$$

结合上面两个公式，就得到O点的差分计算公式

$$\frac{1}{ah}(\phi_O-b\phi_V-c\phi_R)+\alpha(Q)\phi_O=g(Q). \qquad (4.2.32)$$

我们现在看一下$\frac{\partial \phi}{\partial n}$的方向与网格线平行的特殊情况。如$\frac{\partial \phi}{\partial n}$与$X$方向平行，设$O$点与$R$点重合，则（4.2.28）成为

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_O = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_O \approx \frac{\phi_O - \phi_V}{h}. \qquad (4.2.33)$$

得到O点的差分计算公式为

$$\frac{1}{h}(\phi_O - \phi_V) + \alpha(Q)\phi_O = g(Q). \qquad (4.2.34)$$

如$\frac{\partial \phi}{\partial n}$与$y$方向平行，设图(4.2.5)中$V$点与$R$点重合，则（4.2.28）成为

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_O = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_O \approx \frac{\phi_O - \phi_R}{h}. \qquad (4.2.35)$$

得到O点的差分计算公式为

$$\frac{1}{h}(\phi_O - \phi_R) + \alpha(Q)\phi_O = g(Q). \qquad (4.2.36)$$

§4.3 有限差分方程组的迭代解法

求解狄里克莱边界问题的泊松方程：

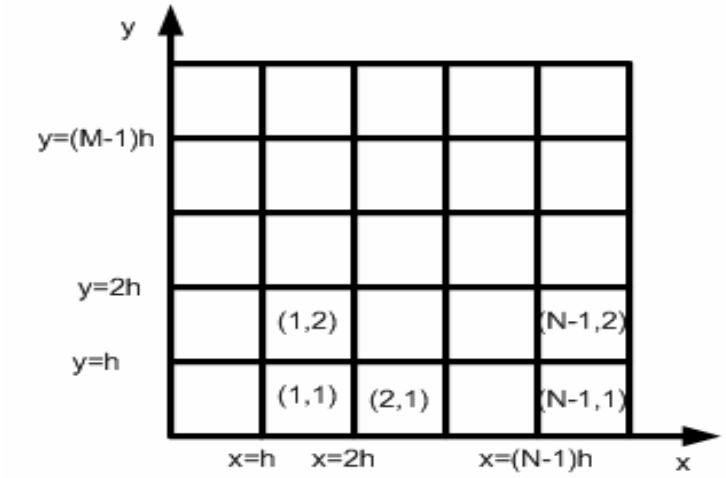
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=q(x,y) \quad , \qquad \text{在 } D \text{ 内,}$$

$$\phi|_G = g\ (p). \qquad \text{在 } D \text{ 的边界 G 上} \qquad (4.3.2)$$

微分方程问题(4.3.2)对应的差分方程组为

$$\phi_{ij}-\frac{1}{4}(\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1})=-\frac{h^2}{4}q_{ij} \quad , \qquad \text{在 } D \text{ 内,}$$

$$\phi_{i,j}=g_{i,j} \quad , \qquad \text{在 } D \text{ 的边界 G 上。} \qquad (4.3.3)$$



于是(5.2.17)式可以写为

$$I_{2e}=(\Phi)_e^T(P)_e=(\Phi)_e^T\frac{\Delta}{3}\rho_e\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad . \tag{5.2.19}$$

$$t_k^{(e)}=\iint_e N_k\,dxdy=\frac{\Delta}{3},\qquad (k=i,j,m)\quad . \tag{5.2.20}$$

从(5.2.19)式中可以看出

$$(P)_e=\begin{pmatrix}p_i^{(e)}\\p_j^{(e)}\\p_m^{(e)}\end{pmatrix}=\frac{\Delta}{3}\rho_e\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad . \tag{5.2.21}$$

最后我们得到$I_2(\varphi)$的向量记法为：

$$I_2(\varphi)=\sum_{e=1}^{e_0}I_{2e}(\varphi)=\sum_{e=1}^{e_0}(\Phi)_e^T(P)_e\ . \tag{5.2.22}$$

综合(5.2.16)和(5.2.22)式，我们就得到泛函表达式

$$\begin{aligned}I(\varphi)&=I_1(\varphi)-I_2(\varphi)\\&=\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{e_0}(\Phi)_e^T(K)_e(\Phi)_e-\sum_{e=1}^{e_0}(\Phi)_e^T(P)_e\ .\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

引入 y 方向的层向量（也可以取 x 方向分层的层向量）

$$\phi_j = \begin{pmatrix} \phi_{1,j} \\ \phi_{2,j} \\ \vdots \\ \phi_{N-1,j} \end{pmatrix}, \qquad q_j = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} h^2 q_{1,j} \\ h^2 q_{2,j} \\ \vdots \\ h^2 q_{N-1,j} \end{pmatrix}.$$

并记

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix}.$$

则方程组（4.3.3）就可以写为

$$\mathrm{K}\Phi = B . \qquad (4.3.4)$$

其中 K 矩阵的形式如

$$\mathrm{K} = \begin{pmatrix} G & -I/4 & \cdots & 0 \\ -I/4 & G & -I/4 \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -I/4 \\ 0 & \cdots & -I/4 & G \end{pmatrix}. \qquad (4.3.5)$$

I 是$(N-1)^2$阶的单位矩阵。G 为$(N-1)^2$ 阶方阵，其具体表示为

$$G=\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & \cdots & 0 \\ 1/4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1/4 \\ 0 & \cdots & -1/4 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (4.3.6)$$

从公式（4.3.3）－（4.3.6），我们可以得到$y=h$上各个节点的差分方程有如下形式

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & \cdots & 0 \\ -1/4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1/4 \\ 0 & & -1/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \vdots \\ \phi_{N-1,1} \end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \\ \vdots \\ \phi_{N-1,2} \end{pmatrix}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} h^2q_{1,1}-g_{0,1}-g_{1,0} \\ h^2q_{2,1}-g_{2,0} \\ \vdots \\ h^2q_{N-1,1}-g_{N,1}-g_{N-1,0} \end{pmatrix}=b_1 \quad . \quad (4.3.7)$$

即

$$G\phi_1-\frac{1}{4}I\phi_2=b_1 \quad . \qquad (4.3.8)$$

同样沿$y=2h$上的各节点可以列出差分方程为

$$-\frac{1}{4}I\phi_1+G\phi_2-\frac{1}{4}I\phi_3=b_2 \quad . \qquad (4.3.9)$$

其中

$$b_2 = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} h^2 q_{1,2} - g_{0,2} \\ h^2 q_{2,2} \\ \vdots \\ h^2 q_{N-1,2} - g_{N,2} \end{pmatrix} . \qquad (4.3.10)$$

求解方程 (4.3.4) 的方法：

直接求解法

这是通过求系数矩阵 $\mathbb{K}$ 的逆矩阵来得到方程的解

$$\Phi = K^{-1} B \quad . \qquad (4.3.11)$$

在实际运用中，由于矩阵 K 的维数通常都很大，且计算机计算的舍入误差会引起数值结果的不稳定，因而在实际应用中还存在较大困难。但对象泊松方程这类问题的求解，就可以采用直接法。泊松方程用富里叶变换改写后，采用直接求解法计算会非常快。

随机游动

迭代求解法

高斯－赛德尔迭代方法

$$\phi_{i,j}^{(k+1)}=\frac{1}{4}(\phi_{i+1,j}^{(k)}+\phi_{i,j+1}^{(k)}+\phi_{i-1,j}^{(k+1)}+\phi_{i,j-1}^{(k+1)}-h^2q_{i,j}). \qquad (4.3.22)$$

它在起始阶段的收敛速度可能比简单的直接迭代法快些，但仍然不是很理想。

为了加快收敛速度，通常引入一个松弛因子，而把用（4.3.22）式迭代计算出的结果作为一个中间结果，它表示为

$$\bar{\phi}_{i,j}^{(k+1)}=\frac{1}{4}(\phi_{i+1,j}^{(k)}+\phi_{i,j+1}^{(k)}+\phi_{i-1,j}^{(k+1)}+\phi_{i,j-1}^{(k+1)}-h^2q_{i,j}). \qquad (4.3.25)$$

取$k+1$次迭代的最后近似值为$\bar{\phi}_{i,j}^{(k)}$和$\phi_{i,j}^{(k)}$的加权平均，即

$$\phi_{i,j}^{(k+1)}=\phi_{i,j}^{(k)}+\omega(\bar{\phi}_{i,j}^{(k+1)}-\phi_{i,j}^{(k)})=\omega\bar{\phi}_{i,j}^{(k+1)}+(1-\omega)\phi_{i,j}^{(k)}$$

$$=\phi_{i,j}^{(k)}+\frac{\omega}{4}(\phi_{i+1,j}^{(k)}+\phi_{i,j+1}^{(k)}+\phi_{i-1,j}^{(k+1)}+\phi_{i,j-1}^{(k+1)}-h^2q_{i,j}-4\phi_{i,j}^{(k)}). \qquad (4.3.26)$$

这就是所谓的**超松弛迭代法**。

The End